Algebra Booleana

Corso di Architettura degli elaboratori e laboratorio

Modulo Laboratorio

Gabriella Verga

Introduzione

L’Algebra Booleana è un sistema algebrico in cui ogni variabile può assumere solo 2 valori (0 e 1)

Principali operazioni definite su variabili binarie (FUNZIONI LOGICHE FONDAMENTALI):

- Somma logica o **OR**
- Prodotto logico o **AND**
- Complementazione, Negazione, Inversione o **NOT**
- Differenza simmetrica, OR esclusivo o **XOR**

Ciascuna operazione prende in ingresso una o più variabili binarie e rende in uscita una variabile binaria

Somma logica o OR

- La somma logica o OR è una funzione che vale 1 solo se almeno uno dei suoi ingressi binari vale 1.

- Si denota tramite gli operatori a due argomenti "**+**" o "V"
- La forma algebrica della somma è:
  - $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2 = x_1 \vee x_2$
- Dove x_1,x_2 si dicono variabili d'ingresso ed f il valore di uscita della funzione.

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Proprietà base della Somma logica

- **Proprietà commutativa**: $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$
- **Proprietà associativa:** $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$
- Pertanto:
  - $f = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = 1 \Leftrightarrow \exists\, x_i \mid x_i = 1 \text{ con } 1 \leq i \leq n$

- **Identità:**
- $1 + x = 1$
- $0 + x = x$

Prodotto logico o AND

- Il prodotto logico o AND è una funzione che vale 1 solo se tutti i suoi ingressi binari valgono 1
- Si denota tramite gli operatori a due argomenti "·" o "∧"
- La forma algebrica della somma è:
  - $f(x_1,x_2) = x_1 \cdot x_2 = x_1 \wedge x_2$

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Proprietà base del Prodotto logico

- **Proprietà commutativa**: $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$
- **Proprietà associativa:** $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$
- Pertanto:
  - $\boldsymbol{f = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = 1 \Leftrightarrow \forall x_i \mid x_i = 1 \text{ con } 1 \leq i \leq n}$

- **Identità:**
- $1 \cdot x = x$
- $0 \cdot x = 0$

Operatori di Negazione o NOT

- Il complemento logico o inversione o NOT è una funzione che inverte il valore dell'unica variabile in ingresso

- Si denota tramite gli operatori a due argomenti "¯" o "¬"
- La forma algebrica della inversione è:
  - $f(x_1) = \neg x_1$

- Proprietà di involuzione (doppia negazione)

x_1	$f(x_1)$
0	1
1	0

Differenza simmetrica o XOR

- La differenza simmetrica o XOR è la funzione che vale 1 se e solo se gli 1 nei suoi ingressi sono in numero dispari.
- Si denota tramite gli operatori a due argomenti "$\oplus$".
- La forma algebrica della differenza simmetrica è:
  - $f(x_1,x_2) = x_1 \oplus x_2$

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Proprietà

- **Proprietà commutativa**: $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$
- **Proprietà associativa:** $x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3$
- **Identità:**
- $1 \oplus x = \overline{x}$
- $0 \oplus x = x$
- $f = x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1}\, x_2 + x_1\, \overline{x_2}$

x_1	x_2	$\overline{x_1}\, x_2$	$x_1\, \overline{x_2}$	f
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

Precedenza tra operatori

Operatore	Precedenza
Negazione – NOT	1
Prodotto – AND	2
Somma – OR	3
OR esclusivo – XOR	4

Per forzare la precedenza di un operatore si possono usare le parentesi.

$(x_1x_2) + (x_1\overline{x_2}) + (\overline{x_1}x_2)$

$x_1(x_2 + x_1)(\overline{x_2} + \overline{x_1})\ x_2$

$x_1x_2 + x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_2$

$x_1x_2 + x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_2$

Altre proprietà: Regole dell'algebra di Boole

REGOLA	FORMA DUALE
Proprietà Distributiva	
$x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
Proprietà Di idempotenza	
$x + x = x$	$x \cdot x = x$
Proprietà di complemento	
$x + \neg x = 1$	$x \cdot \neg x = 0$
Proprietà dello 1 e dello 0	
$1 + x = 1$	$0 \cdot x = 0$

Teorema di De Morgan

$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \cdot \overline{y}$	$x + y$	$\overline{x + y}$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0

$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} + \overline{y}$	$x \cdot y$	$\overline{x \cdot y}$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0

Funzioni Logiche e tabelle di verità

Funzioni Logiche

- **Funzione logica**: funzione con **una o più** variabili BINARIE di **ingresso** ed **una** variabile BINARIA di **uscita**.
- Una funzione logica può essere espressa con (una SOLA) una TABELLA DI VERITA'.
- Una tabella di verità ha 2^m righe con m+1 colonne, dove m è il numero di variabili in ingresso.

x_1	x_2	$y = f(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

con:

- $f(x_1, x_2) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} + x_1 x_2$
- m = 2
- numero di righe 4
- numero di colonne 3

Espressione logica

- Esistono **infinite** espressioni che rappresentano una funzione logica. Per sapere quale funzione è rappresentata da una espressione logica basta calcolarne la tabella di verità.
- Data una tabella di verità *che rappresenta una certa funzione è possibile derivare le espressioni logiche equivalente.*

- Si dicono **forme canoniche** due procedimenti standard per trovare un'espressione logica (non minima) corrispondente.
  - PRIMA FORMA CANONICA (SOP)
  - SECONDA FORMA CANONICA (POS)

Prima Forma canonica

SOMMA DI PRODOTTI (SOP)

1. Si individuano tutti i casi in cui il risultato è pari a **1**.
2. Per ogni caso, si costruisce un prodotto delle n variabili (detto **mintermine**). Ogni variabile è:
   - ✓ se uguale a 1 → FORMA DIRETTA
   - ✓ se uguale a 0 → FORMA NEGATA
3. Si sommano tra loro i prodotti ottenuti.

Esempio

x_1	x_2	x_3	f_1
0	0	0	**1**
0	0	1	**1**
0	1	0	0
0	1	1	**1**
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	**1**

$f_1 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 + \overline{x_1}\,x_2\,x_3 + x_1\,x_2\,x_3$

Seconda Forma canonica

PRODOTTO DI SOMME (POS)

1. Si individuano tutti i casi in cui il risultato è pari a **0**.
2. Per ogni caso, si costruisce una somma delle n variabili (detto **maxtermine**). Ogni variabile è:
    - ✓ se uguale a 0 → FORMA DIRETTA
    - ✓ se uguale a 1 → FORMA NEGATA
3. Si moltiplicano tra loro le somme ottenute.

Esempio

x_1	x_2	x_3	f_1
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	**0**
0	1	1	1
1	0	0	**0**
1	0	1	**0**
1	1	0	**0**
1	1	1	1

$f_1 = (x_1 + \overline{x_2} + x_3) \cdot (\overline{x_1} + x_2 + x_3) \cdot (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3)$

Sintesi in forma minima

Sintesi in forma minima

- **Due espressioni logiche si dicono equivalenti se hanno la medesima tabella di verità.**
- Una espressione si dice in **forma minima** quando non esiste nessun altra espressione equivalente con un costo inferiore.
- E' possibile ridurre il costo del circuito sottoponendo l'espressione algebrica a una serie di trasformazioni algebriche.
- ***Una funzione** minimizzata comporta **un** circuito **logico** più semplice e di conseguenza a più basso costo ed ingombro rispetto a quello realizzato partendo dalla **funzione** non minimizzata.*
- Per espressioni SOP e POS usiamo il criterio di costo dei **LETTERALI** (ma ne esistono altri): il costo di un espressione è dato dal numero di comparse di variabili nell'espressione stessa.
- *Ad esempio:* $(x_1 + x_2) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (x_1 + x_2)$ ➔ *COSTO 6* $x_1 \cdot x_2$ ➔ *COSTO 2*

Facciamo un passo indietro..

REGOLA	FORMA DUALE
Proprietà Distributiva	
$x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
Proprietà Di idempotenza	
$x + x = x$	$x \cdot x = x$
Proprietà di complemento	
$x + \neg x = 1$	$x \cdot \neg x = 0$
Proprietà dello 1 e dello 0	
$1 + x = 1$	$0 \cdot x = 0$

Primo esempio di Minimizzazione

$$\begin{aligned}
\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 + \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 &= \\
= \overline{x}_1\overline{x}_2(\overline{x}_3 + x_3) + x_2 x_3(\overline{x}_1 + x_1) &= \qquad (distributiva) \\
= \overline{x}_1\overline{x}_2 \cdot 1 + x_2 x_3 \cdot 1 &= \qquad (complemento) \\
= \overline{x}_1\overline{x}_2 + x_2 x_3 &= \qquad (forma\ minima)
\end{aligned}$$

Secondo esempio di Minimizzazione

$$
\begin{aligned}
\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 + \overline{x}_1 x_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2 x_3 &= \\
\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2 x_3 &= \quad (idempotenza) \\
= \overline{x}_1\overline{x}_2(\overline{x}_3 + x_3) + \overline{x}_1\overline{x}_3(\overline{x}_2 + x_2) + x_1\overline{x}_2(\overline{x}_3 + x_3) &= \quad (distributiva) \\
= \overline{x}_1\overline{x}_2 \cdot 1 + \overline{x}_1\overline{x}_3 \cdot 1 + x_1\overline{x}_2 \cdot 1 &= \quad (complemento) \\
= \overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_1\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2 &= \\
= \overline{x}_2(\overline{x}_1 + x_1) + \overline{x}_1\overline{x}_3 &= \quad (distributiva) \\
= \overline{x}_2 \cdot 1 + \overline{x}_1\overline{x}_3 &= \quad (complemento) \\
= \overline{x}_2 + \overline{x}_1\overline{x}_3 &= \quad (forma\ minima)
\end{aligned}
$$